Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno 1956 - Serie IV, Vol. XXXIV, n. 3 (pagg. 148-158)

C. F. MANARA

La Geometria nell'ambito del pensiero matematico

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno 1956 - Serie IV, vol. XXXIV, n. 3 (pagg. 148-158)

La Geometria nell'ambito del pensiero matematico [1]

1. Il determinare esattamente il posto di una singola scienza, come la Geometria, nel vasto universo del pensiero matematico appare oggi più che mai un'impresa ardua e difficile. Oggi più che mai, dico, appare molto difficile il precisare i limiti della scienza geometrica ed il fissarne l'essenza di una definizione che sia al riparo da ogni critica, a causa del continuo aumentare dell'enorme massa di proposizioni e teoremi che va (legittimamente o meno) sotto il nome di Geometria e per il continuo approfondirsi dell'analisi dei principi e il contemporaneo crescere delle esigenze logico-critiche.

A conforto di queste mie affermazioni potrei citare esempi di illustri Autori i quali, all'inizio dei loro trattati di Geometria o di altre scienze affini, rinunziano esplicitamente a definire l'oggetto dei trattati stessi, dicendo che solo la lettura di questi potrà dare un'idea sufficientemente esatta del contenuto.

Ricordo tuttavia che, in una accezione comune ed elementare, la Geometria è considerata come la scienza relativa a quelle esperienze ed osservazioni che vertono sulla forma degli oggetti e sulle loro dimensioni e relazioni spaziali.

A questa massa di osservazioni ed esperienze spaziali venne fin dall'antichità associata l'idea di continuo; pertanto, fin dalle più antiche classificazioni delle scieuze, si operò una specie di dicotomia nel campo della scienza matematica, e

[1] Discorso inaugurale dell'anno Accademico 1954-55 della Università di Modena.

venne attribuito alla Geometria lo studio della « quantità continua » ed alla Aritmetica lo studio della « quantità discontinua ».

Questa classificazione non è, naturalmente, più sostenibile oggi, non fosse altro per la invenzione della Geometria Analitica e per la importanza essenziale che l'idea del continuo possiede nell'Analisi Matematica. Tuttavia può essere interessante osservare che una certa dicotomia nel pensiero matematico (se pure con termini ovviamente diversi rispetto alla antichità) si è quasi sempre mantenuta nel corso della Storia e ancora oggi si può osservare e notare.

Non è mia intenzione addentrarmi qui nell'analisi, sul piano strettamente psicologico, del sorgere del pensiero matematico; di questo problema interessante e complesso si sono occupati filosofi, psicologi, storici della Scienza e anche matematici di valore. E tutti coloro cha hanno svolto anche superficialmente una analisi cosiffatta, hanno notato quasi sempre due momenti della ricerca, due aspetti della creazione dell'atto di pensiero matematico. Tali momenti — notiamolo subito — non sono separati, ma anzi, tanto nella Storia del pensiero matematico quanto nella evoluzione psicologica di una singola scoperta, si intrecciano e si alternano; e questo alternarsi è stimolo al ricercatore singolo ed alla Scienza, ed aiuto nel consolidare il possesso del patrimonio scientifico conquistato. Tali momenti si potrebbero, molto all'ingrosso, indicare come il momento della intuizione divinatrice e quello della critica, o anche l'aspetto sintetico e l'aspetto analitico del pensiero matematico. Ad essi potrebbero, ancora molto all'ingrosso, farsi corrispondere due tipi di pensiero e di procedimento matematico: un tipo di matematica che si potrebbe chiamare « qualitativa », per quanto paradossale possa apparire questa espressione, ed un tipo di matematica « quantitativa ».

Va detto subito che queste distinzioni, per quanto brillanti possano apparire, dànno tuttavia dei concetti imprecisi e sfumati, sia perchè i due momenti, nell'ambito di uno stesso concreto fenomeno psicologico e storico, sono continuamente intrecciati e avvicendati tra loro (come abbiamo già detto), sia perchè difficilmento una tale distinzione resisterebbe ad una impostazione logica precisa e si lascierebbe ridurre a quella chiarezza assoluta a cui ci ha abituati il pensiero matematico moderno. Tuttavia, prendendo questa distinzione per quello che vale, dirò che in questo senso si potrebbe assegnare alla Geometria in prevalenza uno di questi momenti del pensiero matematico e precisamente il momento del ragionamento qualitativo, l'aspetto della sintesi. È mia intenzione passare brevemente in rassegna i titoli di merito che la Geometria, intesa in questo senso, ha presso il pensiero matematico moderno; far vedere quale stimolo essa abbia fornito a quale massa di risultati essa abbia procurato alla matematica.

2. Ricorderò anzitutto la Geometria Algebrica, che è uno dei vanti della scuola matematica italiana e che allinea una dinastia ormai quasi secolare di nomi di portata mondiale, come quelli di Cremona, Castelnuovo, Enriques, Severi, Chisini, Beniamino Segre, Conforto. Essa ci dà uno degli esempi più belli e tipici di un tale modo di ricerca matematica, tanto sotto l'aspetto psicologico che sotto l'aspetto metodologico.

Dal punto di vista psicologico perchè essa appare coltivata da scienziati e pensatori nei quali la potenza di immaginazione creatrice e la capacità di intuizione e — oso dire — di divinazione dei risultati della ricerca si mostra in una misura tale che ci lascia stupiti e riverenti.

Sotto l'aspetto metodologico perchè essa si muove quasi sempre nel campo puramente qualitativo. Invero essa trae le sue origini dalla teoria delle funzioni di variabile complessa e tratta una classe particolare di tali funzioni: precisamente le funzioni algebriche, cioè quelle definite implicitamente da una equazione algebrica in due o più variabili.

Orbene moltissimi risultati vengono ottenuti come conseguenza della sola ipotesi della algebricità delle funzioni, dal loro comportamento qualitativo « in grande » come si usa dire, cioè per tutti i valori — finiti o no — delle variabili. È un'impresa quasi impossibile il tentare di esporre tali risultati in modo che vengano afferrati da un pubblico non formato da soli specialisti; mi limiterò a ricordare per es. le numerosissime ed elegantissime conseguenze che si possono trarre dal teorema che afferma essere necessariamente costante una funzione algebrica che non ha zeri: innumerevoli questioni, anche di Geometria elementare, vengono risolte nel modo più breve ed elegante o vengono rischiarate in modo del tutto inaspettato.

Fra le più suggestive proposizioni della teoria delle funzioni di variabile complessa ricorderò qui, come esempio, il Teorema dell' indicatore logaritmico di CAUCHY. Questo teorema si potrebbe dire di spirito essenzialmente geometrico, nel senso che vogliamo dare qui a questa parola; esso afferma che, data una funzione y complessa, analitica ed uniforme della variabile complessa x, tracciata una qualunque curva chiusa regolare Γ nel piano rappresentativo della variabile complessa indipendente x e fatta percorrere Γ una sola volta dal punto x in senso positivo, la differenza tra il numero degli zeri e quello dei poli della y contenuti nella Γ è uguale al numero dei giri compiuti dal punto indice della variabile dipendente y attorno all' origine.

Ho voluto qui ricordare questo teorema anzitutto perchè esso permette di contare il numero delle soluzioni (complesse) di una equazione contenute in una determinata regione del piano della variabile complessa; esso ammette quindi come caso particolare il Teorema fondamentale dell' algebra e si può anche dire il capostipite di una lunga discendenza di Teoremi che hanno da tempo costituito una intera branca della Geometria Algebrica: la Geometria Numerativa, che si occupa, per così dire, soltanto di « contare » le soluzioni dei problemi; il che può essere considerato a prima vista un risultato modesto, ma richiede talvolta una straordinaria intuizione e una profondissima capacità di critica, nella soluzione di problemi che sono di enorme complessità e difficoltà. Abbiamo qui degli esempi tra i più belli di questa possibilità di arrivare a risultati numerici senza eseguire i calcoli, di « fare i conti senza eseguirli » (come si esprime con paradossale acutezza un illustre rappresentante della Geometria Italiana) che ci mostra quanto avanti si possa giungere sulla strada dell' analisi puramente qualitativa. Purchè, naturalmente, tali analisi sia eseguita da ricercatori che hanno quelle doti di intuizione e di immaginazione di cui si diceva sopra, insieme con uno spirito analogo a quello che PASCAL chiamava « esprit de finesse », che giunge alla intuizione ed alla critica dei risultati facendo con un solo salto la strada che sarà poi faticosamente ribattuta dai procedimenti della logica formale.

Alla Geometria Numerativa possiamo attribuire i principi di corrispondenza di CHASLES e di CAYLEY–BRILL che si sono dimostrati strumenti di grandissima potenza per la risoluzione dei problemi geometrici più disparati.

3. Ma ho ricordato qui il Teorema dell'indicatore logaritmico di CAUCHY, tra i tanti, anche per un'altra ragione: perchè esso ci dà un interessantissimo esempio di stretta connessione tra i Teoremi di Geometria Algebrica (quando in essi venga usato) e un'altra branca della Geometria, nella quale l'analisi qualitativa del continuo è l'elemento costitutivo essenziale: voglio dire la Topologia o Analysis situs.

Certo non si può ignorare che anche per la Topologia è venuto il momento della revisione logica, della assiomatizzazione, della impostazione del tutto astratta come scienza ipotetico-deduttiva, formulabile in simboli e codificabile in regole di sintassi dei simboli stessi. Mi riferisco però alla Topologia come analisi delle più generali proprietà geometriche delle figure, alla Topologia che entra nella grande classificazione del « Programma di ERLANGEN » di KLEIN (su cui torneremo tra poco) come studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto alle trasformazioni biunivoche e continue.

In questo senso il Teorema sopra citato di CAUCHY è un Teorema di Topologia in quanto si può enunciare dicendo che la funzione y della x stabilisce una corrispondenza tra il piano della variabile complessa x e quello della y, corrispondenza in cui alla curva chiusa Γ corrisponde una curva pure chiusa Γ' che si avvolge un certo numero di volte attorno ad un punto. E questo è appunto un teorema di competenza della Topologia in quanto la proprietà di una curva chiusa di avvolgersi un certo numero di volte attorno ad un punto rimane invariata qualunque sia la deformazione a cui venga sottoposto il piano in cui la curva si trova purchè tale deformazione avvenga in modo continuo, senza lacerazioni nè duplicazioni o sovrapposizioni.

Questo modo di considerare il Teorema di CAUCHY è profondo di penetrazione e fecondo di risultati, tanto da far pensare che (mi si passi l'espressione) ne colga la vera essenza; e ciò è provato dalle varie applicazioni e generalizzazioni di esso, non ultima quella di un principio analogo a quello di CAYLEY-BRILL e applicabile alle corrispondenze anche non analitiche tra due superficie bilatere chiuse.

Nè a questo si limitano i punti di contatto tra la Geometria Algebrica e la Topologia: chè anzi a volte vien fatto di pensare che le più suggestive proprietà della Geometria Algebrica siano quelle che ammettono un substrato topologico. È nota fin dalle origini la connessione che esiste tra il genere di una curva algebrica e l'ordine di connessione di una determinata superficie chiusa: la riemanniana della curva; è pure noto il significato topologico del fondamentale Teorema di ABEL che caratterizza l'appartenenza dei gruppi di punti ad una serie lineare su di una curva algebrica.

Non si possono dimenticare, anche in una rapidissima rassegna, le fondamentali ricerche di SEVERI sulla teoria della Base su una superficie algebrica, che lo stesso Autore ha collegato con profonde proprietà topologiche della varietà quadridimensionale che rappresenta la riemanniana di tale superficie; nè i risultati di LEFSCHETZ ancora sulla topologia delle superficie algebriche

Ricorderò infine a titolo di esempio tutta la serie di questioni che riguardano i problemi di esistenza delle funzioni algebriche di più variabili indipendenti. Tali problemi sono strettamente connessi con proprietà di immersione, essenzialmente topologiche, di certe varietà chiuse in altre. Per es. proprietà di immersione di supefici (che rappresentano riemanniane di curve algebriche) in varietà quadridimensionali che rappresentano riemanniane i piani complessi.

Si deve all'opera del CHISINI, ed in seguito della sua scuola, il collegamento di tali proprietà con proprietà di nodi o trecce nello spazio tridimensionale abituale, e la applicazione di tali strumenti a dimostrare teoremi di esistenza e di unicità birazionale di funzioni algebriche di più variabili.

Non si può fare a meno di notare la semplicità e la potenza suggestiva di un tale strumento di lavoro, realizzabile concretamente con modelli fisici nello spazio, ed il carattere tipicamente qualitativo di esso, di stretta competenza della Topologia: invero due circuiti chiusi nello spazio rimangono slegati o concatenati e intrecciati tra loro comunque vengano deformati purchè in modo continuo e senza rotture o compenetrazioni.

4. Mi è accaduto di nominare poco fa il KLEIN, ripromettendomi di tornare sul suo nome. Infatti non si può passare sotto silenzio quella sua famosa Dissertazione inaugurale (comunemente nota ai Matematici come « Programma di ERLANGEN ») nella quale, con una ammirevole profondità di pensiero, Egli applicò alla Geometria il concetto di « Gruppo di Trasformazioni » riuscendo così non solo a classificare le varie branche della scienza geometrica del suo tempo ma a dare dei quadri ideali, nei quali avrebbero trovato posto anche i futuri sviluppi della Geometria.

Per la comprensione di quanto diremo, va notato qui che la espressione « Gruppo di trasformazioni » possiede nella matematica moderna un significato tecnico ben preciso e cioè significa « Un insieme di trasformazioni tale che accanto ad ogni trasformazione contenga anche la sua inversa e contenga pure il prodotto di due qualunque trasformazioni dell'insieme ».

Orbene l'idea del KLEIN consiste nel classificare ogni ramo della Geometria mediante il gruppo di trasformazioni che gli è fondamentale, in quanto ogni ramo risulta caratterizzato come studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto alle trasformazioni di un determinato gruppo.

Così la Geometria Elementare risulta caratterizzata come lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per similitudini, la Geometria Proiettiva come lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per proiezioni. La Geometria Algebrica, allora sul nascere, trova il suo posto nel quadro come lo studio delle proprietà degli enti algebrici invarianti per trasformazioni birazionali.

Nello stesso quadro trovano il loro posto la Topologia e quella che comunemente oggi si chiama la Geometria Differenziale.

Su quest'ultima ritorneremo tra breve. Prima di lasciare l'argomento che riguarda il Programma di ERLANGEN dirò che a mio parere questo rappresenta una specie di caso-limite ideale per la Matematica. Che se la complessità e l'enorme differenzazione degli altri tipi di studi matematici hanno reso impossibile applicare ad essi (e forse neppure sperare nel futuro applicabile) uno stesso criterio di classificazione, esso rimane pur sempre un esempio unico di profondità di pensiero e di eleganza di impostazione.

Non ultima prova della profondità e delle fecondità di queste concezioni è la applicazione che esse hanno trovato anche in campi non strettamente connessi con la Matematica. Mi limito qui a citare le ricerche della scuola di Psicologia del PIAGET che nello studio della psicologia umana e più precisamente infantile si lascia guidare da una impostazione gruppale, trasportando le idee che abbiano esposte, con i dovuti adattamenti e cambiamenti, alla studio delle genesi dei concetti nella psiche infantile.

5. Per ritornare al campo più strettamente connesso con la matematica, non si può fare a meno di ricordare qui l'enorme influsso che una corrente di pensiero di ispirazione tipicamente geometrica ha avuto ed ha ancora sui concetti ispiratori della fisica e, oso dire, sulla scienza della natura in generale.

Intendo parlare della Geometria Differenziale, nella sua specializzazione che va sotto il nome di Calcolo Differenziale Assoluto ovvero, nome oggi più abituale, Calcolo Tensoriale. Nato dalle ricerche di RICCI-CURBASTRO e di LEVI-CIVITA, esso ci dà un'altra realizzazione di una dottrina Geometrica di ispirazione tipicamente Kleiniana.

Esso infatti si propone programmaticamente di creare dei metodi e dei simbolismi che mantengano la loro validità e diano alle relazioni una stessa forma analitica di fronte al più generale cambiamento di coordinate.

Fu così creato un simbolismo e. ciò che ancora più conta, un sistema di concetti che dovevano rivelarsi come il tipo ideale della formulazione matematica delle leggi nella natura: infatti quando più tardi l'EINSTEIN formulò il suo famoso principio di Relatività Generale, negando la esistenza di osservatori privilegiati per qualunque legge fisica e affermando l'esigenza che le leggi fisiche fossero espresse in forma analitica assolutamente indipendente dall'osservatore, trovò nel calcolo differenziale assoluto lo strumento perfetto per la formulazione della sua teoria e la deduzione delle sue conseguenze.

Infatti il principio einsteiniano traduce per le scienze fisiche una esigenza che è fondamentale per ogni tipo di scienza della natura: la esigenza cioè di trascendere e superare la insopprimibile singolarità della osservazione (con tutti i conseguenti limiti e difetti) con la suprema obbiettività della legge; di superare cioè il singolare soggettivo nell' universale obbiettivo.

Per la Fisica, come è noto, la questione si pone in questi termini: il mondo esterno deve essere osservato necessariamente con certi strumenti, con certi determinati sistemi di coordinate che servano di riferimento; in una parola: la realtà deve essere necessariamente tradotta in cifre con riferimento ad un osservatore, la cui esistenza non può, per principio, essere ignorata. Tuttavia le leggi fisiche devono avere una forma analitica che sia la stessa per qualunque osservatore.

Ora il passaggio dall' uno all' altro osservatore implica un cambiamento di coordinate, spaziali e temporali; e la visione geometrica dello spazio-tempo come una varietà quadridimensionale riemanniana o non riemanniana traduce perfettamente tale concezione della scienza fisico-matematica.

Inoltre la influenza del modo di pensare della Geometria differenziale non si limita alla Relatività Einsteiniana, ma si spinge molto più a fondo, fino ai principi stessi della Geometria.

È noto infatti che alla Geometria Differenziale spetta il merito di aver definitivamente concluso una disputa che aveva agitato la Matematica per più di venti secoli: la famosa questione del postulato euclideo delle parallele.

Spetta alla Geometria del secolo XIX l' aver creato consapevolmente (e senza preconcetti di validità del postulato euclideo) dei sistemi di Geometria non euclidea, e spetta in particolare alla Geometria Differenziale l' aver provato la intrinseca coerenza di tali sistemi sciogliendo ogni possibile dubbio sulla loro compatibilità e dando ad essi piena cittadinanza accanto alla Geometria classica Euclidea; anzi riassorbendo per così dire, questa come caso particolarissimo nell' ambito di una dottrina più generale.

L' influenza di un tale risultato è ancora oggi sensibile nel campo della Matematica e della Scienza in generale.

Invero esso ha provocato una revisione critica non solo nel campo dei principi della geometria ma anche nei procedimenti di tutta la Matematica; si è giunti così alla critica fondamentale dei concetti e dei metodi e di conseguenza a quella definizione della matematica (o almeno di un suo aspetto) come sistema ipotetico-deduttivo totalmente astratto che fa ormai parte integrale della mentalità scientifica moderna.

Di più, è stata stimolata una critica ancora più profonda, sui procedimenti stessi della mente umana e sul loro valore, dando così origine a ricerche di logica e di filosofia che oggi sono in piena fioritura e non possono essere ignorate da nessun scienziato che voglia riflettere sul valore dei propri risultati e della conoscenza umana in generale.

La impostazione Riemanniana della Geometria Differenziale riverberava la sua luce sulla impostazione della Geometria in generale e sulla genesi del concetto di spazio: in queste venivano così distinti due momenti: un momento della Geometria « in piccolo » cioè nell' intorno infinitesimo di ciascun punto, con la determinazione di distanze e angoli nell' intorno stesso; e un secondo momento in cui avviene il collegamento tra le varie geometrie di ciascun intorno.

Il primo esempio di una esplicita presa di coscienza di tali due momenti è dato dalla famosa legge di trasporto per parallelismo di Levi-Civita, che venne poi generalizzata nel concetto più ampio di « connessione ».

6. E termino qui la mia esposizione perchè il dare un' idea anche molto vaga, monca ed imprecisa dei recenti sviluppi della Geometria richiederebbe l'addentrarsi in particolari troppo ardui e l' uso di un linguaggio eccessivamente specializzato.

Per concludere dirò soltanto che appare ogni giorno più chiaro come il progresso delle Scienze della Natura coincide con il prevalere sempre maggiore in esse delle valutazioni quantitative e dei metodi matematici, cosicchè la Matematica si presenta come un modello ideale ed un caso limite di conoscenza umana. Se ciò è vero, non sarà dunque stata inutile la mia fatica per mostrare quanta parte abbia la Geometria nel pensiero matematico, la Geometria dico, intesa come analisi puramente qualitativa di concetti e di problemi matematici.

E non fa meraviglia che questa Scienza abbia affascinato ed avvinto tanti sommi intelletti, quando si pensi alla suprema eleganza dei suoi procedimenti, alla meravigliosa profondità delle sue sintesi, alla splendente chiarezza dei suoi risultati.

Certo nessuno si illude che tutto il reale possa ridursi entro quadri così trasparenti e suggestivi; anzi chiunque faccia della ricerca nelle Scienze della Natura esperimenta ogni giorno la verità di quello che è ormai un luogo comune: che cioè l'estendersi del campo illuminato dalle nostre conoscenze porta ogni volta l'aumentare dell'epressione delle tenebre da cui l'uomo si sente circondato.

Tuttavia questo nostro cercare rimane una testimonianza più o meno cosciente, più o meno voluta, ma certo sempre faticata, vissuta e sofferta di una Intelligenza suprema e Divina nella sua essenza, di cui la intelligenza umana va discoprendo ogni giorno le orme del Creato con la sua diuturna ed insonne fatica.

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

LORIA - *Curve sghembe speciali algebriche ecc.* Vol. I	(esaurito)
— — *Curve sghembe speciali algebriche ecc.* Vol. II	800
MELLONI - *Opere.* Vol. I. Legato	5000
MONTAUTI - *Il telemetro monostatico*	1500
PASINI - *Trattato di topografia*	2000
PERSICO - *Introduzione alla fisica matematica*	4000
PORRO - *Trattato di astronomia.* Vol. I	800
PUPPINI - *Idraulica*	3000
Questioni di Matematica applicata, trattate nel 2° Convegno di matematica applicata (Roma 1939)	400
RIGHI - *Scelta di scritti*	4000
RIMINI - *Elementi di elettrotecnica*	4000
— — *Fondamenti di radiotecnica generale*	4500
— — *Fondamenti di analisi matematica.* Vol. I	4000
— — *Fondamenti di analisi matematica.* Vol. II	6000
— — *Elementi di analisi matematica*	1000
SANSONE - *Equazioni differenziali nel campo reale.* Parte I	4000
— — *Idem.* Parte II	4000
SCHIAPPARELLI - *Scritti sulla storia dell'astronomia.* I-II-III	2400
Scritti Matematici, offerti a LUIGI BERZOLARI	2500
SEGRE - *Lezioni di geometria moderna.* Vol. I. Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi	1500
Selecta dal Periodico di Matematiche. Scelta di temi dati nei concorsi - Questioni ed articoli connessi pubblicati dal 1921 al 1951	3000
SUPINO E. - *Il disegno di macchine*	500
TORALDO DI FRANCIA - *Onde elettromagnetiche.*	3000
TORRICELLI - *Opere.* 5 volumi	2500
TRICOMI - *Funzioni ellittiche*	4500
— — *Funzioni analitiche*	1500
VITALI-SANSONE - *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* Parte I	3000
— — Parte II	7000
VOLTA - *Epistolario.* Edizione nazionale. Vol. I	5000
— — Volume II	5000
— — Volume III	5000
— — Volume IV	6000
— — Volume V	6000
ZAGAR - *Astronomia sferica e teorica*	2500

ZANICHELLI - BOLOGNA